

曲率とは何か——比較定理の観点から

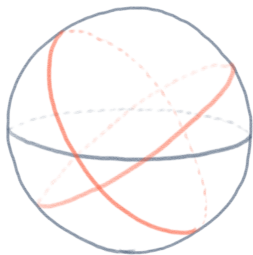
松本佳彦

大阪大学 & スタンフォード大学

2018 年 2 月 25 日

1. Riemann 多様体とは

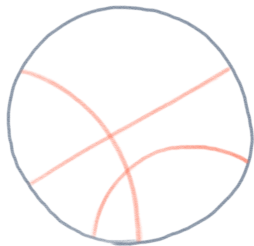
球面 · Euclid 平面 · 双曲平面



S^2
(sphere)

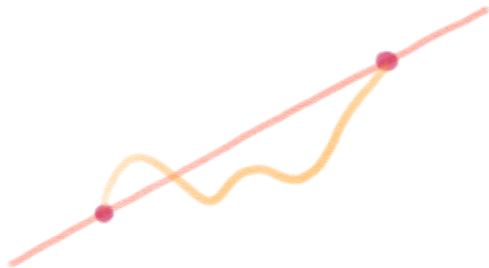


E^2
(Euclidean plane)



H^2
(hyperbolic plane)

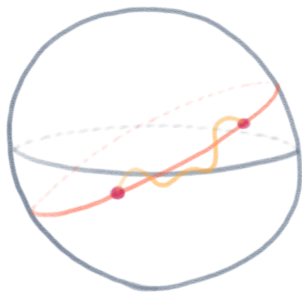
$\mathbb{E}^2$ における直線と距離



直線

「どんな 2 点によって切り取っても、得られる線分は 2 点を結ぶ最短線」
という特徴を持つ

$\mathbb{S}^2$ における「直線」と「距離」



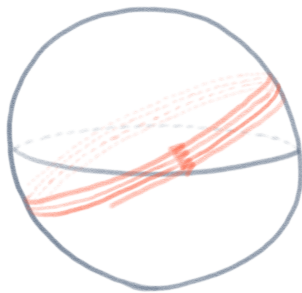
曲線

$\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{S}^2$ という C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）のこと
（定義域としては必要に応じ $(-\infty, \infty)$ 以外の区間を採用することもある）

直線（測地線）

局所最短な曲線のこと． $\mathbb{S}^2$ の場合は大円

$\mathbb{S}^2$ における「直線」と「距離」



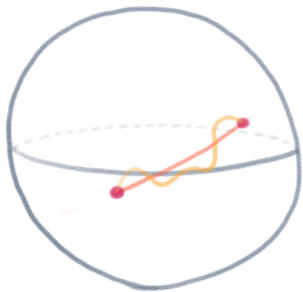
曲線

$\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{S}^2$ という C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）のこと
（定義域としては必要に応じ $(-\infty, \infty)$ 以外の区間を採用することもある）

直線（測地線）

局所最短な曲線のこと． $\mathbb{S}^2$ の場合は大円

$\mathbb{S}^2$ における「直線」と「距離」



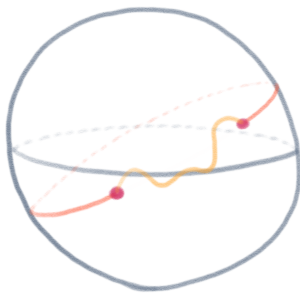
曲線

$\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{S}^2$ という C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）のこと
（定義域としては必要に応じ $(-\infty, \infty)$ 以外の区間を採用することもある）

直線（測地線）

局所最短な曲線のこと． $\mathbb{S}^2$ の場合は大円

$\mathbb{S}^2$ における「直線」と「距離」



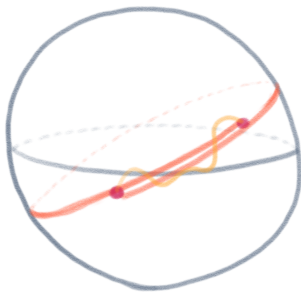
曲線

$\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{S}^2$ という C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）のこと
（定義域としては必要に応じ $(-\infty, \infty)$ 以外の区間を採用することもある）

直線（測地線）

局所最短な曲線のこと． $\mathbb{S}^2$ の場合は大円

$\mathbb{S}^2$ における「直線」と「距離」



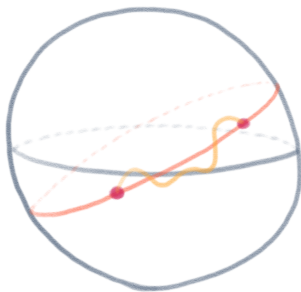
曲線

$\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{S}^2$ という C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）のこと
（定義域としては必要に応じ $(-\infty, \infty)$ 以外の区間を採用することもある）

直線（測地線）

局所最短な曲線のこと． $\mathbb{S}^2$ の場合は大円

$\mathbb{S}^2$ における「直線」と「距離」



曲線

$\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{S}^2$ という C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）のこと
（定義域としては必要に応じ $(-\infty, \infty)$ 以外の区間を採用することもある）

直線（測地線）

局所最短な曲線のこと． $\mathbb{S}^2$ の場合は大円

$\mathbb{S}^2$ における「直線」と「距離」

曲線の長さ

$$(\gamma|_{[t_1, t_2]} \text{ の長さ}) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt. \text{ ここで } |\dot{\gamma}(t)| \text{ とは} \cdots$$

速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ の長さ

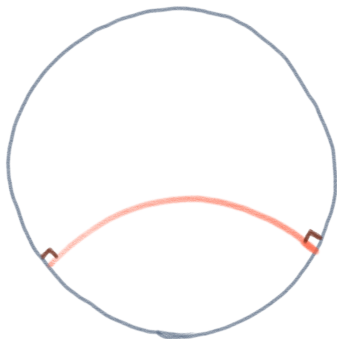
$\mathbb{S}^2$ を $\mathbb{R}^3$ の単位球面と見なし, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とおく.

$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ を $\mathbb{R}^3$ のベクトルと見て, いつも通り長さを測る.
つまり

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}.$$

リーマン幾何学の枠組みにおいて,
「空間」の違いとは, 速度ベクトルの長さを測るルールの違い

$\mathbb{H}^2$ における「直線」と「距離」



直線（測地線）

局所最短な曲線. $\mathbb{H}^2$ の場合は理想境界に直交する円弧^{ideal}

$\mathbb{H}^2$ における「直線」と「距離」

曲線の長さ

$$(\gamma|_{[t_1, t_2]} \text{ の長さ}) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt. \text{ ただし} \cdots$$

速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ の長さ

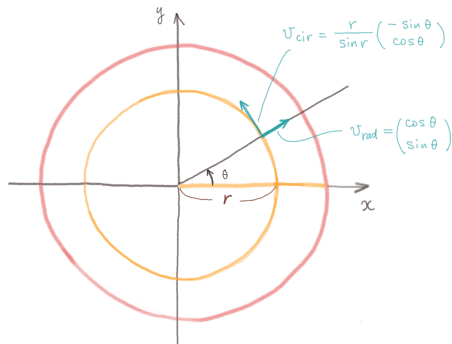
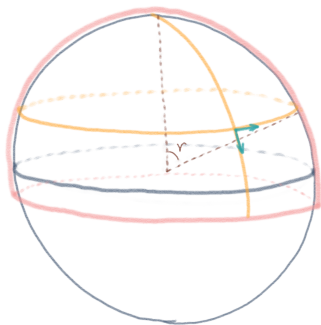
$\mathbb{H}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の単位円板 $\{x^2 + y^2 < 1\}$ と見なし, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ とおく.
 $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ の Euclid 幾何的な長さ $\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$ に手を加えて

$$|\dot{\gamma}(t)| = \frac{2\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{1 - (x(t)^2 + y(t)^2)} \quad \text{と定める.}$$

スケーリングの倍率 $\frac{2}{1 - (x(t)^2 + y(t)^2)}$ は点 $\gamma(t)$ の位置に依存している.
原点から離れるほど倍率は大きくなり, 理想境界に近づく極限で倍率 $\rightarrow \infty$

$\mathbb{S}^2$ における速度ベクトルの長さ [再論]

$\mathbb{S}^2$ の南緯 1° 以北を，北極を中心とした正距方位図法で描く．
写し取った「地図」は， $\mathbb{R}^2$ の部分集合と見なす



(南半球は？ 北緯 1° 以南を，南極を中心とした正距方位図法で描く)

$\mathbb{S}^2$ における速度ベクトルの長さ [再論]

正距方位図法の「地図」上で $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ という座標で表される点において

- ▶ 動径方向のベクトル $v_{\text{rad}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ の長さ——1 とする
- ▶ 円周の接方向のベクトル $v_{\text{cir}} = \frac{r}{\sin r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ の長さ——これも 1 とする
- ▶ ベクトル同士の内積を，上記と $v_{\text{rad}} \perp v_{\text{cir}}$ により定める
- ▶ その内積によって，一般の接ベクトルの長さを定める

接ベクトル

一般に，曲線の速度ベクトルになり得るようなベクトルのこと．
何らかの「地図」を用いることにより， $\mathbb{R}^2$ のベクトルと見なせる

点 p における接空間（接ベクトル空間）

点 p における接ベクトル全体のなすベクトル空間．
何らかの「地図」を用いることにより， $\mathbb{R}^2$ と同一視される

$\mathbb{S}^2$ の接空間の内積を行列で表現する

接空間に定義される内積は、「地図」を通じて $\mathbb{R}^2$ の内積と見なされ、行列

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} \quad \text{で表される.}$$

$$\text{ここで } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

北極を中心とする正距方位図法を用いると

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 r}{r^2} \cdot \sin^2 \theta & (1 - \frac{\sin^2 r}{r^2}) \cos \theta \sin \theta \\ (1 - \frac{\sin^2 r}{r^2}) \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 r}{r^2} \cdot \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{\sin^2 \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} & (1 - \frac{\sin^2 \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}) \frac{xy}{x^2+y^2} \\ (1 - \frac{\sin^2 \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}) \frac{xy}{x^2+y^2} & \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{\sin^2 \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

複雑になるのは図法が良くない（この内積を書き表すのに適していない）から。

多様体の概念

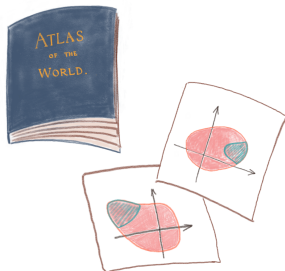
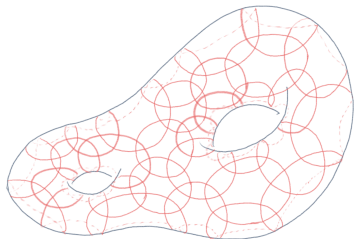
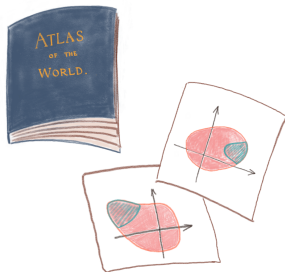
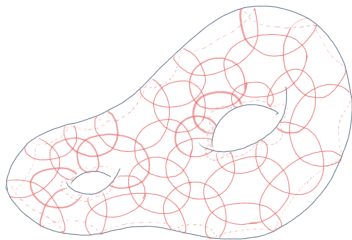


チャート (座標近傍)

空間 M の一部を $\mathbb{R}^n$ の中に写し取った「地図」のこと.

今回は (U, V, φ) などと書く. ここで $U \subset M$ で, $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$

多様体の概念



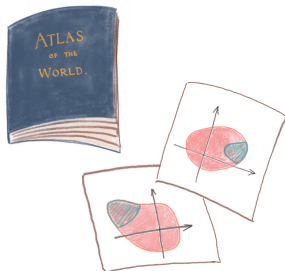
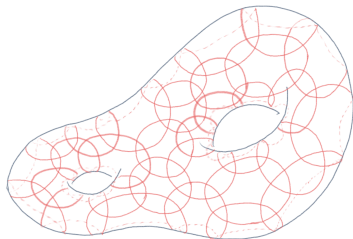
アトラス (座標近傍系)

空間 M 全体を覆うようなチャートの族 $\{(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ のこと

チャート同士には重なりもあり得る． $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき，
この共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ に対応する V_α, V_β の部分集合間における点の対応は

$$\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad \text{で与えられる.}$$

多様体の概念



多様体 (manifold)

アトラス $\{(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を備えた空間 M のこと。
ただし n はチャートによらず一定値であることを要請する (M の次元)

多様体とは、アトラス＝「地図帳」を備えているような空間のこと。
多様体 M では、点 $p \in M$ における接空間 $T_p M$ を、
いずれかのチャート $(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)$ を通じて $\mathbb{R}^n$ として捉えることができる

多様体の正確な定義を読んでみよう

村上信吾『多様体』（共立出版）pp. 7-8，一部改変

定義 M を Hausdorff 位相空間とし， n を自然数とする． M の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と各 U_α において定義された数空間 $\mathbb{R}^n$ への写像 ψ_α が与えられて，つぎの条件がみたされるとき， $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は M に**可微分多様体の構造**を定義するといひ，これが与えられた M を**可微分多様体**，または本書では略して**多様体**という． n を多様体 M の次元といひ， $\dim M$ で示す．

- (i) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
- (ii) 各 $\alpha \in A$ について $\psi_\alpha(U_\alpha)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であつて， ψ_α は U_α から $\psi_\alpha(U_\alpha)$ への同相写像である．
- (iii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のときには， $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ とおいて，写像 $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\psi_\beta(U_{\alpha\beta})$ から $\psi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ への C^∞ 同型写像である．

われわれは (iii) はまだ取りあげていなかったが，以下仮定する．

Riemann 計量

$p \in M$ とする. まず $p \in U_\alpha$ なるチャート $(U_\alpha, V_\alpha, \varphi_\alpha)$ を取る.
すると, このチャートを通じて接空間 $T_p M$ は $\mathbb{R}^n$ と同一視される.
 $\mathbb{R}^n$ に正定値対称 $n \times n$ 行列 $g_{\alpha,p}$ により内積を与えると,
これはチャートによる同一視を通じて $T_p M$ の内積とも見なされる.

ただし, 点 p は複数の U_α に属する可能性がある. 「辻褄が合う」ための条件

$$(*) \quad g_{\alpha,p} = {}^t(J\Phi_{\alpha\beta})_{\varphi_\alpha(p)} g_{\beta,p} (J\Phi_{\alpha\beta})_{\varphi_\alpha(p)}$$

が満たされていて初めて $T_p M$ の内積がうまく定まったことになる.

Riemann 計量

各 $p \in M$ における接空間の内積が, p について滑らかに与えられたもの.
実体としては, 各チャートに対し定義された C^∞ 級写像
 $g_\alpha: U_\alpha \rightarrow \{\text{正定値対称行列}\}$ であって, 上記の条件 $(*)$ を満たすもの

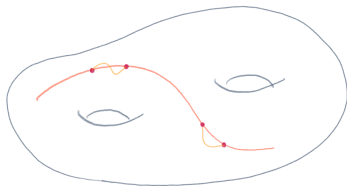
Riemann 多様体

多様体 M に, さらに Riemann 計量 g が与えられたもの. (M, g) と書く

測地線，その存在

測地線

局所最短な曲線 $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ で，
速度ベクトルの長さが1で一定のもの（ここでは約束する）



すなわち， $|\dot{\gamma}(t)| \equiv 1$ であって，さらに次の条件を満たすもの：

$$\forall t \in (a, b)$$

$$\exists \varepsilon > 0$$

$$\forall [t_1, t_2] \subset (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$$

$$\forall \tilde{\gamma} \in C_{\gamma(p_1) \rightarrow \gamma(p_2)} \quad (\gamma|_{[t_1, t_2]} \text{ の長さ}) \leq (\tilde{\gamma} \text{ の長さ}).$$

ただし， $\gamma(t_1)$ を始点， $\gamma(t_2)$ を終点とする曲線全体の集合を $C_{\gamma(t_1) \rightarrow \gamma(t_2)}$ とした．

測地線，その存在

測地線

局所最短な曲線 $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ で，
速度ベクトルの長さが1で一定のもの（とここでは約束する）

定理（測地線の局所的存在）

与えられた点 $p \in M$ および単位接ベクトル $v \in T_p M$ に対し，
 $\varepsilon > 0$ が十分小さければ，
 $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ を満たす測地線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ がただ一つ存在する．

これは正規形常微分方程式の解の存在定理による．なぜか？

$$\gamma \text{ が測地線} \iff \ddot{\gamma}_k(t) = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \quad \text{だから.}$$

Riemann 多様体の完備性

Riemann 多様体の測地完備性

与えられた点 $p \in M$ および単位接ベクトル $v \in T_p M$ に対し,
 $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ を満たす測地線 $\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ が存在すること

$\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$ はいずれも上記の性質を持つ.

Hopf-Rinow の定理

Riemann 多様体について, 次は同値である.

1. (M, g) は測地完備.
2. (M, g) は距離完備. すなわち, g の定める距離に関して, 任意の Cauchy 列は収束する.
3. (M, g) の任意の有界閉部分集合はコンパクト.

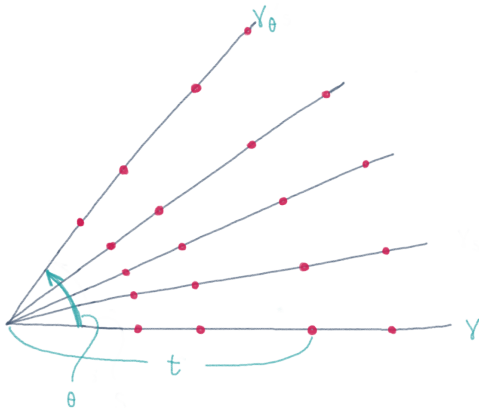
ただし, M の部分集合 A が有界であるとは,
ある点 $p \in M$ を中心とするある半径 $R > 0$ の球 $B_p(R)$ に A が含まれること.

2. 曲率とは

$\mathbb{E}^2$ における測地線の摂動

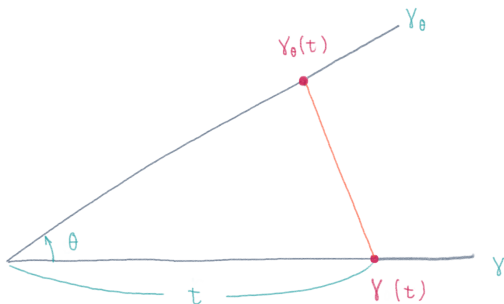
2本の測地線（半直線） γ, γ_θ を考える．

$\gamma_\theta: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^2$ は γ を，始点を固定し，向きを角度 $\theta > 0$ だけ回転させたもの．



時刻 $t \in [0, \infty)$ における，両測地線上の点の距離 $d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))$ に注目したい．

$\mathbb{E}^2$ における測地線の摂動



$$d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = 2t \sin \frac{\theta}{2}.$$

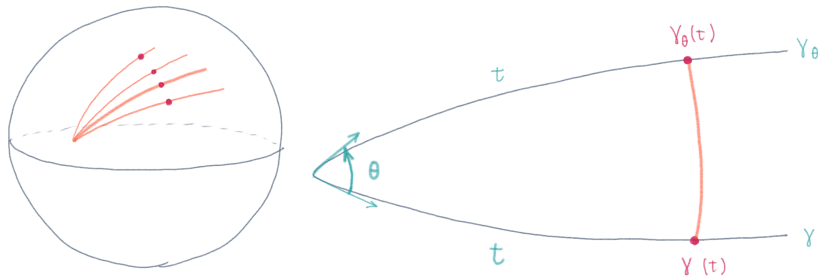
t が大きくなってゆくと, $d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))$ もそれに比例して増大する.

後の考察のため, θ が非常に小さい場合を考える. θ について 1 次近似すると

$$d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = \theta t + O(\theta^2).$$

S^2 における測地線の摂動

2本の測地線を考える（大円の一部であった）。



球面余弦定理によって

$$\cos d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t \cos \theta.$$

$d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))$ を直接「求める」ことは無理． θ に関する 1 次近似をする．

$\mathbb{S}^2$ における測地線の摂動

$$\cos d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t \cos \theta.$$

上式を θ について 3 次近似 (!) する.

t を固定したとき $d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = O(\theta)$ に注意 ($\hat{\otimes}$ ここに行間あり) して

$$1 - \frac{d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))^2}{2} = \cos^2 t + \sin^2 t \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + O(\theta^4),$$

$$\therefore 1 - \frac{d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))^2}{2} = 1 - \frac{\theta^2}{2} \sin^2 t + O(\theta^4).$$

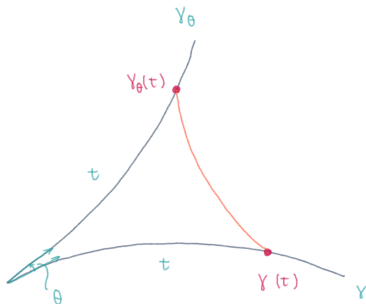
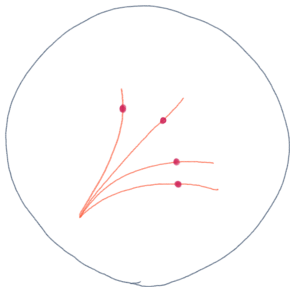
よって

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) &= \theta \sin t + O(\theta^2) \\ &= \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \cdots\right) \theta + O(\theta^2). \end{aligned}$$

$-\frac{1}{6}t^3$ に注目. $\mathbb{E}^2$ の場合と比較して「距離を縮める」力が働いている.

$\mathbb{H}^2$ における測地線の摂動

2本の測地線を考える（理想境界に直交する円周の一部だった）。



双曲余弦定理によって

$$\cosh d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = \cosh^2 t - \sinh^2 t \cos \theta.$$

$d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))$ を θ に関する 1 次近似のレベルで求める．上式を 3 次近似．

$\mathbb{H}^2$ における測地線の摂動

$$\cosh d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = \cosh^2 t - \sinh^2 t \cos \theta.$$

t を固定したとき $d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) = O(\theta)$ に注意 ($\hat{\otimes}$) して

$$1 + \frac{d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))^2}{2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + O(\theta^4),$$

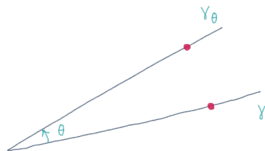
$$\therefore 1 + \frac{d(\gamma(t), \gamma_\theta(t))^2}{2} = 1 + \frac{\theta^2}{2} \sinh^2 t + O(\theta^4).$$

よって

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) &= \theta \sinh t + O(\theta^2) \\ &= \left(t + \frac{1}{6}t^3 + \cdots\right) \theta + O(\theta^2). \end{aligned}$$

$+\frac{1}{6}t^3$ に注目. $\mathbb{E}^2$ の場合と比較して「距離を広げる」力が働いている.

曲率とは何か（2次元の場合）

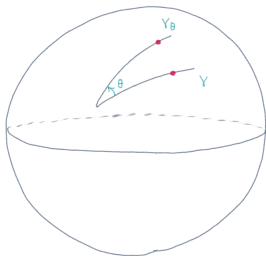


$\mathbb{E}^2$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$$

$$= t$$

曲率 0

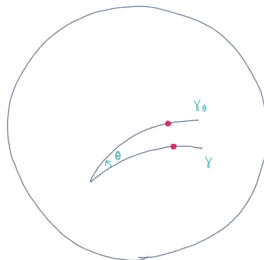


$\mathbb{S}^2$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$$

$$= t - \frac{1}{6}t^3 + \dots$$

曲率 +1



$\mathbb{H}^2$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$$

$$= t + \frac{1}{6}t^3 + \dots$$

曲率 -1

曲率とは何か（2次元の場合）

曲率（Gauss 曲率）

一般に、2次元 Riemann 多様体 (M, g) の点 p において

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0} = t + at^3 + \dots$$

となる。 $K_p = -6a$ のことを、 (M, g) の点 p における Gauss 曲率と呼ぶ。

点 p における Gauss 曲率 K_p とは、 p を端点とする測地線の摂動に働く、
点 p から等距離にある点の間の「距離を縮める」力を示す数のこと

（Hooke の法則に従う）ばねの運動方程式 $\ddot{x} = -kx$ を思い起こされたい。
その解は $x = c \sin \sqrt{k}t = c\sqrt{k}(t - \frac{1}{6}kt^3 + \dots)$ であった（初期条件 $x(0) = 0$ で）。
 $\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$ も、 $k = K_p$ なるばねと漸近的に同じ運動をする。

曲率とは何か (n 次元の場合)

(M, g) を n 次元 Riemann 多様体とし, 点 $p \in M$ を取る.

断面曲率

接空間 $T_p M$ の, 互いに直交する単位ベクトル v, w に対し,

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= p, & \dot{\gamma}(0) &= v, \\ \gamma_\theta(0) &= p, & \dot{\gamma}_\theta(0) &= (\cos \theta)v + (\sin \theta)w\end{aligned}$$

を満たす測地線 γ, γ_θ をとる. そのとき

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0} = t + at^3 + \cdots$$

となる. v, w の張る $T_p M$ の 2 次元部分空間を σ と書いて,

$$K_{p, \sigma} = -6a$$

を, 点 p における, $\sigma \subset T_p M$ に関する断面曲率と呼ぶ.

Jacobi ベクトル場

(M, g) を n 次元 Riemann 多様体とする. t を固定して

$$\rho_t(\theta) = \gamma_\theta(t)$$

を θ でパラメトライズされた曲線と考える. その $\theta = 0$ における速度ベクトルを

$$J(t) = \dot{\rho}_t(0) = \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \gamma_\theta(t) \right|_{\theta=0} \quad \text{と書こう.}$$

Jacobi ベクトル場

γ に沿って, 点 $\gamma(t)$ に $J(t)$ を置いて得られる接ベクトルの場 J を

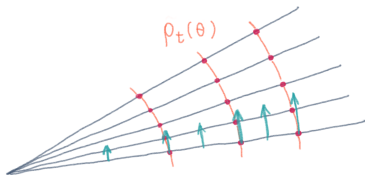
$$J(0) = 0, \quad J'(0) = w$$

を満たす **Jacobi ベクトル場**と呼ぶ (J' は J の「 γ に沿った共変微分」).

※おことわり: この講演では, 「Jacobi ベクトル場」と言ったら, 常に上記のタイプ ($J(0) = 0$, $J'(0)$ は $\dot{\gamma}(0)$ に直交する単位ベクトル) のものを指す.

$\mathbb{E}^2$ における Jacobi ベクトル場

Jacobi ベクトル場を $\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$ の代わりに使いたい.

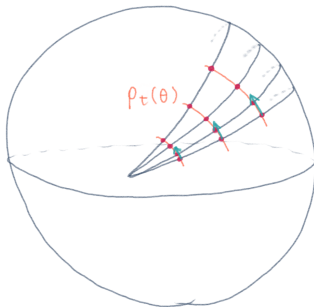


$\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^2$ に沿った左向き単位法ベクトル場を $N(t)$ とすると,
 $J(0) = 0, J'(0) = N(0)$ を満たす Jacobi ベクトル場は

$$J(t) = tN(t).$$

係数 t は $\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$ に一致している.

$\mathbb{S}^2$ における Jacobi ベクトル場



$\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{S}^2$ に沿った左向き単位法ベクトル場を $N(t)$ とすると,
 $J(0) = 0, J'(0) = N(0)$ を満たす Jacobi ベクトル場は

$$J(t) = (\sin t)N(t).$$

係数 $\sin t$ は $\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$ に一致している.

$\mathbb{H}^2$ における Jacobi ベクトル場

$\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$ に沿った左向き単位法ベクトル場を N とすると,
 $J(0) = 0, J'(0) = N(0)$ を満たす Jacobi ベクトル場は

$$J(t) = (\sinh t)N$$

となる (確かめてみてください). 係数 $\sinh t$ は $\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0}$ に一致.



一般に

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} d(\gamma(t), \gamma_\theta(t)) \right|_{\theta=0} = |J(t)|.$$

したがって, 曲率に関するわれわれの理解を次のように述べ直すことができる.

Gauss 曲率 K_p ないし断面曲率 $K_{p,\sigma}$ とは, Jacobi ベクトル場 J に働く,
「ベクトル $J(t)$ の長さを縮める」力を示す数のこと

Jacobi 方程式 (2次元の場合)

Jacobi 方程式

Jacobi ベクトル場は、微分方程式 $J''(t) = -K_{\gamma(t)}J(t)$ を満たす。

ここで共変微分 J', J'' は次のように計算できる：

$$J(t) = j(t)N(t) \quad \text{とおくと} \quad J'(t) = j'(t)N(t), \quad J''(t) = j''(t)N(t).$$

初期条件を $J(0) = 0, J'(0) = N(0)$ とすれば

- ▶ $\mathbb{E}^2$ の場合 ($K \equiv 0$)—— $J''(t) = 0$. 解は $J(t) = tN(t)$.
- ▶ $\mathbb{S}^2$ の場合 ($K \equiv +1$)—— $J''(t) = -J(t)$. 解は $J(t) = (\sin t)N(t)$.
- ▶ $\mathbb{H}^2$ の場合 ($K \equiv -1$)—— $J''(t) = J(t)$. 解は $J(t) = (\sinh t)N(t)$.

Jacobi ベクトル場は、ばねの運動方程式を満たす。
ただしばね定数は点 p に依存して変化する。それが Gauss 曲率 K_p

Jacobi 方程式 (n 次元の場合)

Jacobi 方程式

$$J''(t) = -R_{\gamma(t), \dot{\gamma}(t)} J(t).$$

ここで $R_{\gamma(t), \dot{\gamma}(t)}$ は, $T_{\gamma(t)}M$ の $n-1$ 次元部分ベクトル空間

$$W = \{ w \in T_{\gamma(t)}M \mid \dot{\gamma}(t) \perp w \}$$

に作用する対称線型変換 $W \rightarrow W$ で, 以下のように定まる.

$\dot{\gamma}(t)$ に直交する単位接ベクトル $w \in W$ に対し

$$\langle R_{\gamma(t), \dot{\gamma}(t)} w, w \rangle = K_{\gamma(t), \langle \dot{\gamma}(t), w \rangle}.$$

ここで $K_{\gamma(t), \langle \dot{\gamma}(t), w \rangle}$ は, 点 $\gamma(t)$ における, $\dot{\gamma}(t)$ と w が張る $T_{\gamma(t)}M$ の 2 次元部分空間 $\langle \dot{\gamma}(t), w \rangle$ に関する断面曲率.

Jacobi ベクトル場 $J(t)$ は, 動きに $n-1$ 次元分の自由度がある「ばね」である.

3. 曲率の役割

Jacobi 方程式 [復習]

2 次元の場合

Jacobi ベクトル場は、微分方程式 $J''(t) = -K_{\gamma(t)}J(t)$ を満たす.

n 次元の場合

Jacobi ベクトル場は、微分方程式 $J''(t) = -R_{\gamma(t), \dot{\gamma}(t)}J(t)$ を満たす.

ここで $R_{\gamma(t), \dot{\gamma}(t)}$ は、断面曲率を用いて表すことのできる,

$W = \{ w \in T_{\gamma(t)}M \mid \dot{\gamma}(t) \perp w \}$ に作用する線型変換 $W \rightarrow W$.

Rauch の比較定理

断面曲率の取り得る値の制限は、Jacobi ベクトル場 $J(t)$ の大きさの制限を導く。

Rauch の比較定理（を特別な状況に限定したもの）

(M, g) を n 次元 Riemann 多様体とし、 $k \in \mathbb{R}$ を定数とする。

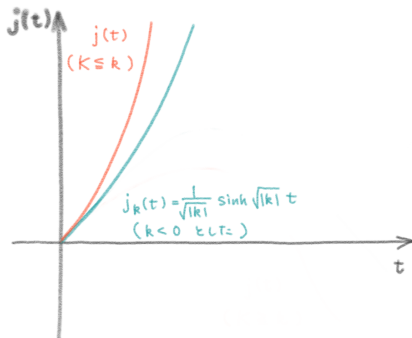
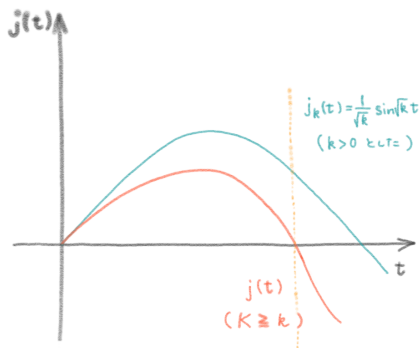
$J(t)$ を、 p を始点とする測地線 γ に沿った Jacobi ベクトル場とする。

1. $K \geq k$ ならば、 $|J(t)| \leq |J_k(t)|$
(ただし、 $|J(t)|$ が $t = 0$ の後で再び 0 になるまでの範囲で)。
2. $K \leq k$ ならば、 $|J(t)| \geq |J_k(t)|$
(ただし、 $k > 0$ の場合は、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ の範囲で)。

ここで $|J_k(t)|$ は、断面曲率 K が一定値 k をとる空間の $|J(t)|$ のこと。すなわち

$$|J_k(t)| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} t & (k > 0, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}) \\ t & (k = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh \sqrt{|k|} t & (k < 0) \end{cases}$$

Rauch の比較定理



断面曲率がより大きい $\Rightarrow$ Jacobi 場は ($t = 0$ 近くでは) より小さい。
 断面曲率がより小さい $\Rightarrow$ Jacobi 場は ($t = 0$ 近くでは) より大きい。

正曲率性は空間が丸まってゆくことを意味する。
 負曲率性は空間が無理矢理に広がってゆくことを意味する。

Bonnet の定理

k を正定数とする.

Bonnet の定理

(M, g) を n 次元完備 Riemann 多様体とし, 断面曲率が

$$K \geq k \quad \text{を満たすと仮定する.}$$

そのとき, (M, g) の任意の 2 点間の距離は $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ 以下. 特に M はコンパクト.

証明の概略——

- ▶ $d(p_1, p_2) > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ を満たす 2 点が存在すると仮定する.
その距離を実現する測地線 γ が存在することを示す (完備性による).
- ▶ Rauch の比較定理から, $J(0) = 0, J'(0) = w \perp \dot{\gamma}(0)$ を満たすどんな Jacobi ベクトル場 $J(t)$ も, その長さ $|J(t)|$ はある $0 < t_0 \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ でいったん 0 に戻る.
- ▶ すると p_1, p_2 を結ぶ γ よりも短い曲線が存在することになる. 矛盾.

「曲率の正值性」に関連する諸定理

Myers の定理 (Bonnet の定理の改良版, 1941 年)

完備 Riemann 多様体 (M, g) の Ricci 曲率テンソルが $\text{Ric} \geq (n-1)kg$ を満たせば, 任意の 2 点間の距離は $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ 以下. 特に M はコンパクト.

Bonnet–Myers の定理からは, $\pi_1(M)$ が有限群であることもわかる (普遍被覆 $\tilde{M}$ もコンパクトだから). Bochner の定理 $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ よりも強い結論.



球面定理

単連結な完備 Riemann 多様体 (M, g) について, $1/4 < K \leq 1$ ならば,

1. (Berger 1960, Klingenberg 1961) M は球面 S^n に同相.
2. (Brendle–Schoen 2009) M は球面 S^n に微分同相.

Cartan–Hadamard の定理

Cartan–Hadamard の定理

(M, g) を n 次元完備 Riemann 多様体であって、単連結、さらに $K \leq 0$ を満たすようなものとする。そのとき M は $\mathbb{R}^n$ に微分同相。

より具体的に、微分同相写像は「指数写像」によって得られる。すなわち——

- ▶ 任意に点 $p \in M$ を取り、これを原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ に対応づけることにする。
- ▶ $T_0\mathbb{R}^n$ と T_pM を、内積を保つような線型同型写像によって対応づける。
- ▶ $v \in T_0\mathbb{R}^n$ と $w \in T_pM$ が対応するとき、各々の測地線 γ, ρ を

$$\begin{aligned}\gamma: [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \gamma(0) &= 0, & \dot{\gamma}(0) &= v, \\ \rho: [0, \infty) &\rightarrow M, & \rho(0) &= p, & \dot{\rho}(0) &= w\end{aligned}$$

と取り、各 $t \geq 0$ に対し、 $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ を $\rho(t) \in M$ に対応させる。

Rauch の比較定理との関係，単連結性とその必要性

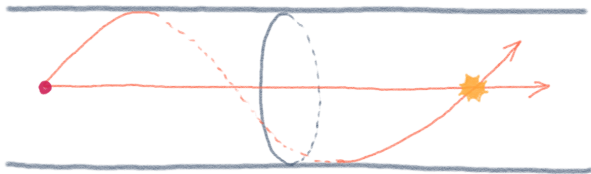
Rauch の比較定理により， M の測地線に沿った Jacobi ベクトル場 $J(t)$ は

$$|J(t)| \geq |J_0(t)| = t \quad (t \geq 0 \text{ 全体で}).$$

このことから，測地線同士は，無限小摂動のレベルで見れば互いに離れていく．



しかし単連結でないと，別の方向に向かった測地線が「1 周まわってぶつかる」という事故が起こり得る．



4. 無限遠境界

Cartan–Hadamard 多様体，その無限遠境界

Cartan–Hadamard の定理

(M, g) を n 次元完備 Riemann 多様体とし，単連結， $K \leq 0$ とする．
そのとき M は $\mathbb{R}^n$ に微分同相．

この仮定を満たす Riemann 多様体を **Cartan–Hadamard 多様体** という．

Cartan–Hadamard 多様体の**無限遠境界**の概念がある (Eberlein–O’Neill 1973)．
これを紹介したい．

$\mathbb{E}^n$ の無限遠境界

プラネタリウムは、 $\mathbb{E}^3$ の無限遠境界（の上半分）の模型とでも言うべきもの。プラネタリウムのスクリーン上の各点には、空間 $\mathbb{E}^3$ のある点から一定の方向を見上げた際に、その視線の上に存在する星が映し出されている。



$\mathbb{E}^n$ の「無限遠境界」 $\partial_\infty \mathbb{E}^n$ はどのようなものであるべきか？

1. 点 $p \in \mathbb{E}^n$ を固定したとき、

- ▶ p を端点とする半直線 $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^n$ は、それぞれ、無限遠境界の別々の点に対応すると考えるべきであろう。
- ▶ 逆に、無限遠境界の点はすべて、 p を端点とするいずれかの半直線に対応する。

2. 2 点 $p, q \in \mathbb{E}^n$ について、

- ▶ p を端点とする半直線 γ_1 と q を端点とする半直線 γ_2 は、平行かつ同じ向きを向いているとき、無限遠境界の同じ点に対応していると考えられるべきであろう。

平行かつ同じ向きの半直線たちをひとまとめにして、 $\partial_\infty \mathbb{E}^n$ の「点」と考える。

$$\partial_\infty \mathbb{E}^n = \{ \text{半直線 } \gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^n \} / \sim, \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1, \gamma_2 \text{ は平行で同じ向き.}$$

$\mathbb{H}^n$ の無限遠境界

$\mathbb{H}^n$ の「無限遠境界」 $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ はどういうものであるべきか？

1. 点 $p \in \mathbb{H}^n$ を固定したとき、 p を端点とする測地線は、無限遠境界の点と一対一対応する。
2. 端点の異なる測地線 $\gamma_1, \gamma_2: [0, \infty) \rightarrow M$ は、いつ無限遠境界の同じ点に対応すると考えるべきか。

$\mathbb{H}^n$ の 2 つの測地線 $\gamma_1, \gamma_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ について、以下の条件は同値。

1. $\mathbb{H}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の単位開球と見なすことができるが、その見方のもとで、 γ_1, γ_2 は球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ と共通の点で交わる。
2. 任意の点 $o \in \mathbb{H}^n$ について $\angle \gamma_1(t) o \gamma_2(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$)。
3. $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ は有界。つまり、 $\exists C > 0 \forall t \ d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq C$ 。

上記の 3 条件のいずれか（同じことだが、すべて）が成り立っているときに、 γ_1, γ_2 は $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ の同じ点を定めるものと考える。

Cartan–Hadamard 多様体の無限遠境界

(M, g) を Cartan–Hadamard 多様体とする.

(完備 Riemann 多様体であって, 単連結, $K \leq 0$.)

無限遠境界

(M, g) の (Eberlein–O’Neill の意味の) 無限遠境界 $\partial_\infty M$ とは,

$$\{ \text{測地線 } \gamma: [0, \infty) \rightarrow M \} / \sim$$

という商集合のことである. ただし

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \text{ は有界.}$$

無限遠境界の幾何構造

Cartan–Hadamard 多様体 (M, g) の無限遠境界 $\partial_\infty M$ は $\mathbb{S}^{n-1}$ と同相なのだが、

- ▶ $M = \mathbb{E}^n$ の場合—— $\partial_\infty \mathbb{E}^n$ はさらに、自然に Riemann 多様体と見なせる。
- ▶ $M = \mathbb{H}^n$ の場合—— $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ はさらに、自然に共形多様体と見なせる。
(接ベクトル同士の内積は定まらないが、角度は定まる.)

これはどの程度一般化されるか？

定理 (Anderson–Schoen 1985)

(M, g) を C-H 多様体とし、さらに $-b^2 \leq K \leq -a^2$ とする ($a, b > 0$).
そのとき $\partial_\infty M$ は、自然に C^α 級構造を持つ. ここで $\alpha = a/b$.

さらに Bahuaud (2009), Bahuaud–Gicquaud (2011) が興味深い.

「共形コンパクト計量」という完備 Riemann 計量のクラスを考えるアプローチもある.